**3.19. Turunan Fungsi y = xr , r Bilangan Rasional**

Jika n = r dengan r bilangan rasional, apakah turunan y = xr sama dengan r x r-1 ? Untuk menjawab pertanyaan tersebut ikuti langkah-langkah berikut.

Karena r bilangan rasional, maka dapat ditulis r = p/q atau r = - p/q dengan p, q ∈ **B**+ dan q ≠ 0.

Pertama-tama diselidiki untuk r = p/q

y = xr ⇒ y = xp/q

Misalkan u = x1/q ⇒ y = up

Untuk menentukan y'= digunakan aturan rantai

y'= = . ⇒ y' = p up-1 . 1/q x1/q-1

= p x (p/q-1/q) . 1/q x1/q-1

= p/q x((p/q-1/q)+(1/q-1)

= p/q x((p/q-1) atau

= r x r-1 ∎

Selanjutnya diselidiki untuk r = - p/q

y = xr ⇒ y = x- p/q

Misalkan u = x-1 ⇒ y = up/q

Selanjutnya untuk menentukan y' digunakan aturan rantai.

y'= = . ⇒ y' = p/q u(p/q – 1) . – x-2

= - p/q x(-p/q + 1) . x-2

= - p/q x(-p/q - 1) , atau

= r xr-1 ∎

Dalam situasi khusus p = 1 dapat dijelaskan sebagai berikut.

y = xr ⇒ y = x1/q ⇒ yq = x ⇔ x = yq

= q yq-1

y' = = =

= .

= . atau

= . atau

= . atau

= r xr-1 ∎

**3.19.1. Perluasan Turunan Fungsi y = xr , r Bilangan Rasional**

Jika f(x) = xr , maka f '(x) = r xr-1 untuk r ∈ Q.

Perluasannya

f(x) = g(x) r ⇒ f '(x) = r . g(x)r-1. g'(x) ∀r ∈ Q.

Bukti: Misal f(x) = y dan g(x) = u

f(x) = g(x)r menjadi y = ur

= r ur-1 dan = g'(x)

Dengan menerapkan aturan rantai, diperoleh

= r ur-1. g'(x) atau

= r g(x) r-1. g'(x) ∎

Contoh 1: Tentukan turunan pertama dari

a. f(x) =

b. f(x) =

c. f(x) =

Penyelesaian: a. f(x) = atau f(x) = x1/11

f '(x) = 1/11 x1/11 – 1

= 1/11 x- 10/11

b. f(x) = atau f(x) = x7/20

f '(x) = 7/20 x7/20 - 1

= 7/20 x -13/20

c. f(x) = atau

f x) = (x2 - 2x + 11)11/15

f '(x) = 11/15 (x2 - 2x + 11) 11/15 - 1 . (2x - 2) atau

= 11/15 (2x - 2)( x2 - 2x + 11) – 4/15

**Soal-soal:**

Tentukan turunan pertama dari

1. f(x) = (2x3- 2x2 + 2x - 2)3/4

2. g(x) = (3x2 + 3 sin 2x)6/7

3. h(x) = (sinh 3x - sin 2x + 1)2/9

4. k(x) = (ln (2x - 5)4/7

5. l(x) = (tan 2x - arc tan 3x)5/8

**3.20.** **Turunan Fungsi Implisit**

Fungsi y = f(x) dapat ditulis dalam bentuk persamaan F(x,y) = 0 yang bentuknya F(x,y) = f(x) - y = 0. Tetapi bentuk F(x,y) = 0 belum tentu mudah dibentuk sebagai y = f(x). Bentuk F(x,y) = 0 selanjutnya disebut bentuk implisit dari satu fungsi atu lebih, sedangkan bentuk y = f(x) disebut eksplisit. Berikut diberikan beberapa contoh bentuk implisit yang tidak mudah dijadikan bentuk eksplisit.

1. F(x,y) = 2 x2 y3 + 3 x3 y2 - 5 x4 y + y5 = 0

2. F(x,y) = - x3 y - 3 x2 y2 + x4 = 0

Adanya bentuk implisit yang tidak mudah dibentuk menjadi eksplisit, maka perlu dimunculkan lebih dari satu fungsi f yang memenuhi persamaan implisit tersebut. Dari contoh 1, yaitu

1. F(x,y) = 2 x2 y3 + 3 x3 y2 - 5 x4 y + y5 = 0

y5 , y3 , y2 dan y diubah dalam bentuk [f(x)]5 , [f(x)]3 , [f(x)]2 dan f(x), sehingga

F(x,y) = 2 x2 [f(x)]3 + 3 x3 [f(x)]2 - 5 x4 f(x) + [f(x)]5 = 0

untuk setiap x pada daerah definisi F.

Dengan menggunakan aturan turunan yang ada, termasuk aturan rantai fungsi F dapat ditentukan turunannya terhadap x.

Contoh : Tentukan turunan terhadap x (Dx y) dari

x5 + 3x3 - 2xy2 + y3 = 0

Penyelesaian: Diketahui x5 + 3x3 - 2xy2 + y3 = 0

Misal y = f(x)

Dx x5 + Dx 3x3 - Dx 2x [f(x)]2 + Dx [f(x)]3 = Dx 0

5x4 + 9 x2 - (2.[f(x)]2 + 2x.2 f(x) f '(x)) + 3 [f(x)]2 f '(x) = 0 , atau

5x4 + 9 x2 - (2.y2 + 2x.2 y y' ) + 3 y2 y' = 0 , atau

5x4 + 9 x2 - 2.y2 - 4x.y y' + 3 y2 y' = 0

5x4 + 9 x2 - 2.y2 = 4x.y y' - 3 y2 y' atau

5x4 + 9 x2 - 2.y2 = y' (4xy - 3 y2 )

∴ Dx = y' =

**Soal-soal**

Tentukan turunan pertama terhadap x dari

1. xy + x - 2y - 5 = 0

2. x2 - 2 xy + y2 - 10 = 0

3. x3 - x2 y + 3 xy2 - y3 = 0

4. eXY - 4x2 y + 9 = 0

5. sin (x2y) + eXY + x2 = 0

6. y - cos (x+y) = 0

7. cos(xy) - y = 0

8. tan(xy3 + x3y) + ln (xy2 + sin x)

9. x2 y – xy2 + x3 + y3 = 0

10. 5y5 - 2x5+ x2y3 – x3y2 = 0

**3.21. Garis Singgung Dan Garis Normal**

Jika f fungsi dalam x mempunyai turunan f '(x0) pada x = x0 , maka kurva y = f(x) mempunyai garis-singgung pada P0(x0, y0) dengan gradien/slope/kemiringan m = tan θ = f '(x0). Persamaan garis-singgungnya adalah y – y0 = m (x - x0).

Jika m = 0, maka persamaan garis-singgung pada kurva di titik P0(x0, y0) adalah y = y0 yang sejajar dengan sumbu x. Jika f '(x0) = ∞ dan f(x) kontinu pada x = x0 , maka persamaan garis-singgung pada kurva di titik P0(x0, y0) adalah x = x0 yang sejajar dengan sumbu y.

Garis normal adalah garis tegak lurus dengan garis-singgung yang melalui suatu titik singgung. Persamaan garis normal pada P0(x0, y0) adalah y – y0 = m2 (x – x0).

m2 diperoleh dari m1 . m2 = -1 atau m2 = - .

Dalam kasus khusus:

Garis singgung horisontal yaitu y = y0  ⇒ garis normal x = x0 ,

Garis singgung vertikal yaitu x = x0 ⇒ garis normal y = y0.

Panjang garis-singgung didefinisikan dengan panjang garis-singgung dari titik singgung P0(x0,y0) dengan titik potong garis-singgung pada sumbu x. Panjang proyeksi garis-singgung terhadap sumbu x disebut panjang sub-tangen.

Panjang garis normal didefinisikan dengan panjang garis-normal dari titik singgung P0(x0,y0)) dengan titik potong garis normal pada sumbu x. Panjang proyeksi garis normal terhadap sumbu x disebut panjang sub-normal.

Contoh 1 : Tentukan persamaan garis-singgung dan garis normal dari y = x3 - 2x2 + 4 pada titik (2,4).

Penyelesaian: y = x3 - 2x2 + 4 atau f(x) = x3 - 2x2 + 4 maka f '(x) = 3x2 - 4x.

Gradien/slope dari garis-singgung pada titik (2,4) adalah

m = f '(2) = 3.22 - 4.2 = 4

Gradien/slope dari garis-normal pada titik (2,4) adalah

m2 = - 1/m1 = - 1/4

Persamaan garis-singgungnya adalah y - 4 = 4(x-2) atau

y = 4x – 4

Persamaan garis normalnya adalah y - 4 = - 1/4 (x-2) atau

y = - 1/4 x + 4 1/2 atau x + 4y - 18 = 0

Contoh 2: Tentukan persamaan gari-garis vertikal yang memotong garis-garis dengan persamaan

(1) y = x3 + 2x2 + 4x - 4 dan (2) 3y = 2x3 + 9x2 -3x - 3.

Penyelesaian: Misal garis-garis vertikal yang diminta adalah x = x0 .

y = x3 + 2x2 + 4x - 4 diperoleh

y' = 3x2 + 4x + 4, pada x = x0 maka m = 3(x0)2 + 4x0 + 4 dan

3y = 2x3 + 9x2 -3x – 3 ⇔ y = 2/3x3 + 3x2 - x - 1

diperoleh

y' = 2x2 + 6x - 1, pada x = x0 maka m = 2(x0)2+ 6x0 - 1

Karena 3(x0)2 + 4x0 + 4 = 2(x0)2+ 6x0 - 1, diperoleh

x0 = -1 dan x0 = 3. Dengan demikian garis-garis vertikal yang dimaksud adalah x = -1 dan x = 3.

**Soal-soal**

1. Tentukan persamaan garis-singgung dan garis normal dari x2 + 3 xy + y2 = 5 pada titik (1,1)

2. Tentukan persamaan garis-singgung kurva 3y = 2 x + 9x -3x - 3 pada titik (3, 21). Tentukan

pula panjang garis-singgungnya.

3. Tunjukkan bahwa persamaan garis-singgung dengan m ≠ 0 dari parabola y = 4ax2 adalah

y = mx + a/m.

4. Tunjukkan bahwa persamaan garis-singgung dari ellips a x + b y = a b pada titik P(x ,y )

adalah a xx + b yy = a b .

5. Tentukan persamaan garis-singgung pada hiperbola xy = 1 di titik (-1,1).